

PROGRAMME

I GENERALITES

1°) - DEFINITIONS

2°) - CLASSIFICATION DE SIGNAUX

3°) - QUELQUES SIGNAUX IMPORTANTS

II SERIE DE FOURIER

1°) - SERIES DE FOURIER

2°) - THEOREME DE PARSEVAL

III CONVOLUTION

IV TRANSFORMEE DE FOURIER

V ECHANTILLONNAGE

1°) - ECHANTILLONNAGE IDEAL

2°) - RECONSTRUCTION DU SIGNAL

VI FILTRAGE

CHAPITRE I

GENERALITES

I Généralités

1°) - Définitions.

Le *signal* est la représentation physique d'un phénomène qui évolue dans le temps ou dans l'espace.

Le *traitement du signal (T.S)* est une discipline technique qui a pour objet l'élaboration, la détection et l'interprétation des signaux porteurs d'informations.

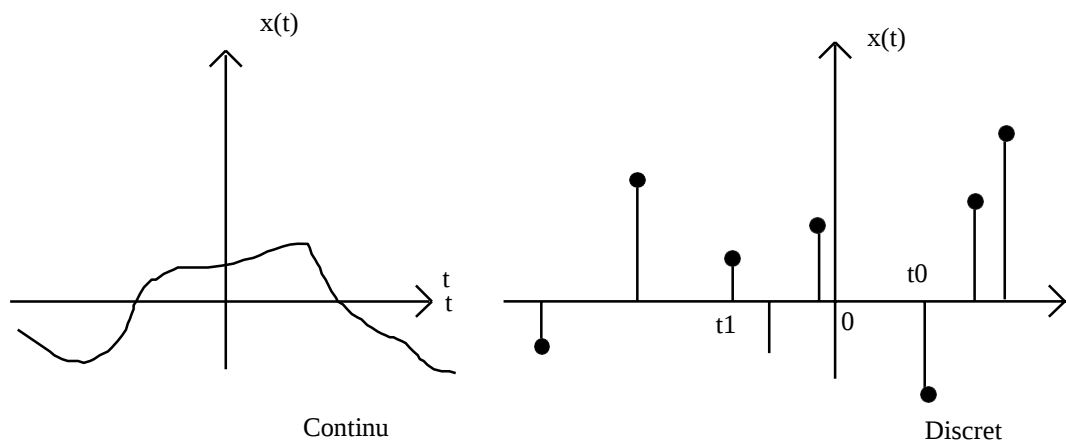
Cette discipline s'appuie sur la *théorie du signal* qui donne une description mathématique des signaux. Cette théorie fait essentiellement appel à l'algèbre linéaire, l'analyse fonctionnelle, l'électricité et l'étude des processus aléatoires.

Les applications du traitement du signal sont nombreuses (Télécommunication, Géophysique, Reconnaissance des formes, Biomédical, Acoustique, etc...).

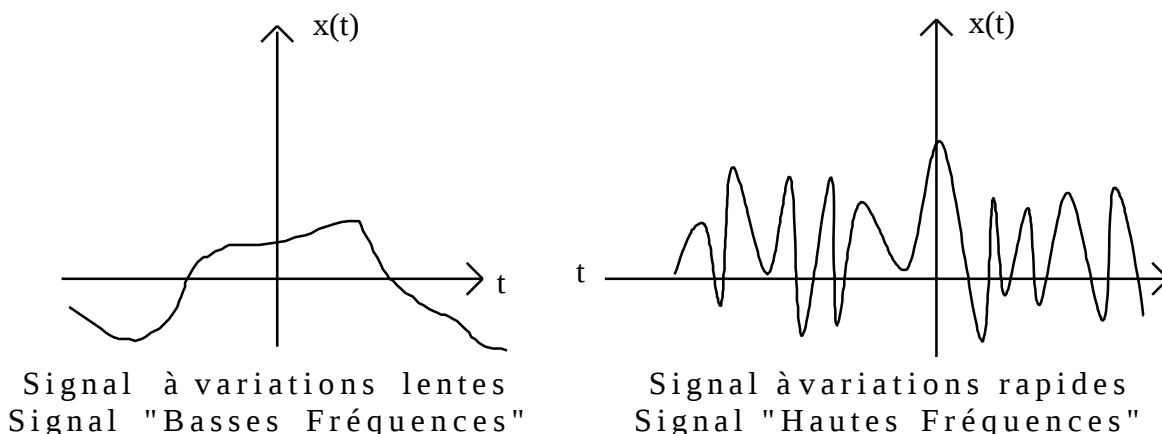
2°) - Classification des signaux.

Il existe différents modes de classification :

a) **Morphologique** : On distingue ici les signaux qui prennent des valeurs à chaque instant t (Signal *continu*) et les signaux qui n'ont de valeurs qu'à certains instants t_i (Signal *discret*).



b) **Spectrale** : On classe les signaux suivant la bande de fréquences qu'ils occupent.



c) **Energétique** : Les signaux peuvent être à *énergie finie* ou à *puissance moyenne finie*.

Les signaux à énergie finie vérifient la condition :

$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty$$

On dit aussi qu'ils sont de carré sommable. Les signaux à support borné, c'est à dire de durée limitée, sont à énergie finie.

Les signaux à puissance moyenne finie sont tels que :

$$0 < P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \right] < +\infty$$

Les signaux périodiques sont à puissance moyenne finie.

Remarque :

- Un signal à énergie finie a une puissance moyenne nulle ($P_x = 0$).
- Un signal à puissance moyenne finie (non nulle) possède une énergie W_x infinie.

d) **Typologique** : On distingue ici les signaux suivant que leur évolution est *déterministe* ou *aléatoire*.

Signal déterministe : Un signal déterministe peut être prédit par un modèle mathématique connu. On distingue deux sous classes :

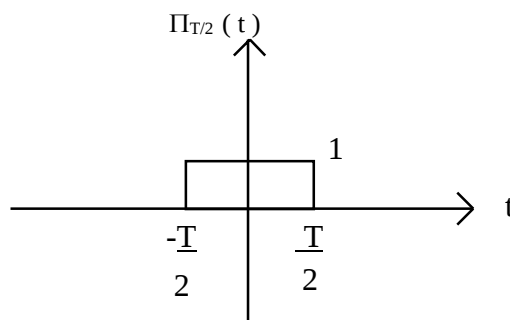
- Les signaux périodiques $x(t) = x(t + T)$.
- Les signaux non-périodiques.

Signal Aléatoire : Le signal aléatoire a un comportement imprévisible. On le décrit grâce à des outils statistiques (densité de probabilités, moyenne, variance,...).

3°) - Quelques signaux importants.

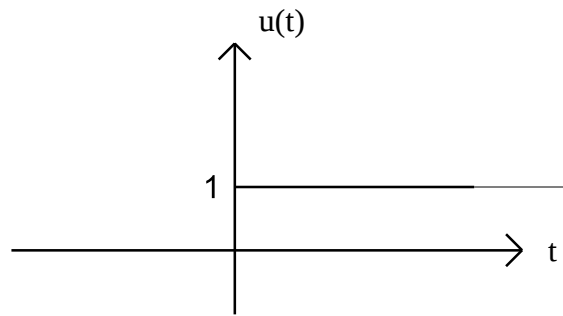
- Porte $\Pi_{T/2}(t) = 1$ si $t \in [-T/2 \quad T/2]$

0 ailleurs



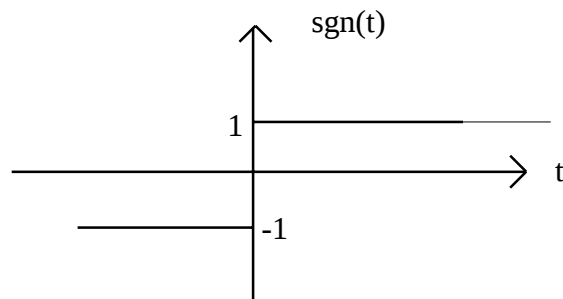
- Echelon de Heaviside : $u(t)$

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

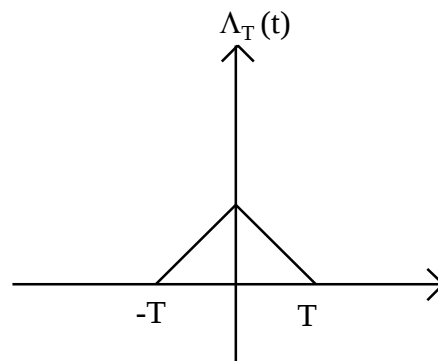


- **Signe : sgn(t)**

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

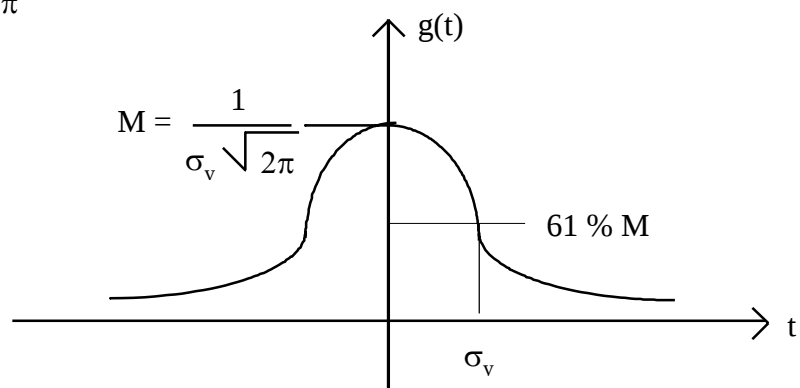


- **Triangulaire e** : $\Lambda_T(t) = \begin{cases} 1 - |t|/T & \text{si } |t| < T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$



- **Gaussienne : g(t)**

$$g(t) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_y^2}}$$



-Fonction sinus cardinal

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

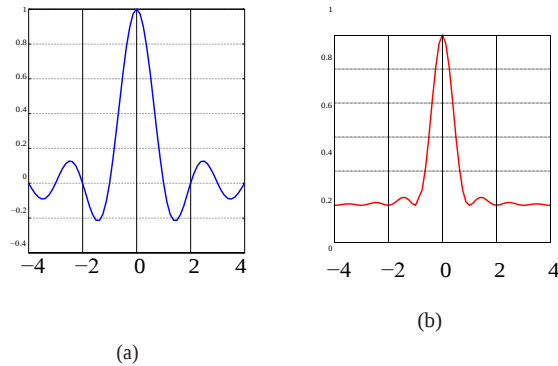


Figure 2.1 – (a) fonction $\text{sinc}(t)$. (b) fonction $\text{sinc}(t)^2$.

La fonction sinus cardinal est elle aussi normalisée : $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(t) dt = 1$.

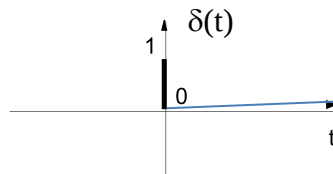
D'autre part, on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(t) dt = 1$.

- Impulsion unité (distribution de Dirac)

Mathématiquement, c'est une fonction (distribution) définie par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0),$$

quelle que soit la fonction $f(t)$.



La fonction de Dirac est normalisée :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

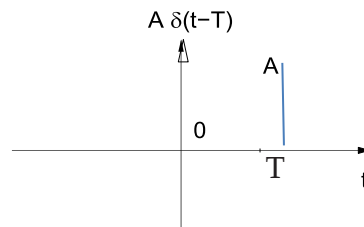
D'autre part, on a :

$$\int_{-\infty}^t \delta(t) dt = 0 \quad \text{si } t < 0 = \Gamma(t)$$

$$1 \quad \text{si } t > 0$$

On dit que $\Gamma(t)$ est la primitive de $\delta(t)$ ou bien que $\delta(t)$ est la dérivée de $\Gamma(t)$ (au sens des distributions). L'impulsion de Dirac est un signal non réalisable. Physiquement, on a coutume de modéliser une impulsion de Dirac par un signal rectangle (porte) dont la largeur tend vers 0 et l'amplitude tend vers l'infini.

-Impulsion décalée $A \delta(t - T)$:



L'impulsion de Dirac est égale à la limite de nombreuses familles de fonctions, ainsi :

$$\lim_{T \rightarrow 0} (1/T) \text{rect}(t/T)$$

$$\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} (1/T) \text{tri}(t/T)$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} (1/T) \text{sinc}(t/T)$$

4) Propriétés de la fonction de Dirac

1. $\delta(t) = 0$ si $t \neq 0$,
2. $f(t) \delta(t) = f(0) \delta(t)$ et $f(t) \delta(t - T) = f(T) \delta(t - T)$,
3. $\delta(k t) = \frac{1}{|k|} \delta(t)$.

-Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle est simplement définie comme étant la réponse d'un système physique dont l'entrée est une impulsion de Dirac. Elle permet de caractériser les systèmes linéaires dans le domaine temporel

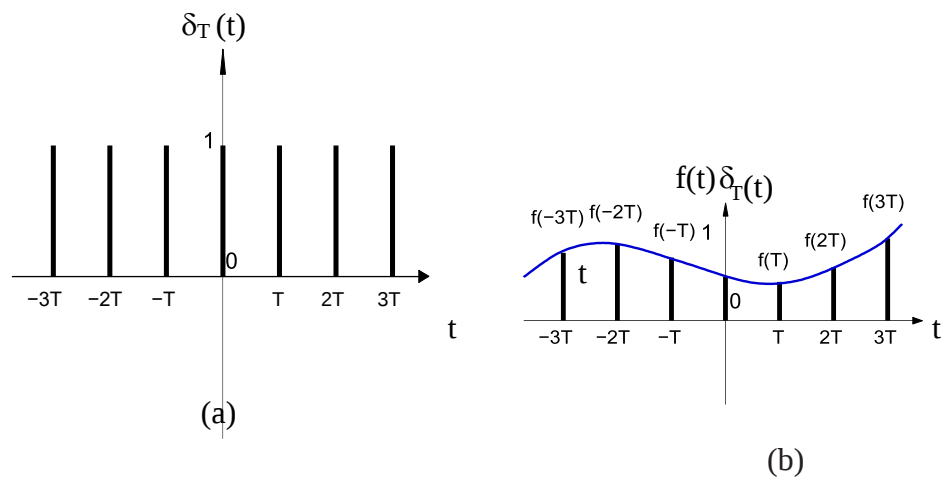
-Fonction "peigne de Dirac" (fonction d'échantillonnage)

La fonction $\delta_T(t)$ est définie par :

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(t - kT)$$

Cette fonction est appelée "fonction d'échantillonnage" car selon la propriété 2 (voir ci-dessus) on a, pour tout signal $f(t)$:

$$f(t)\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} f(kT) \delta(t - kT).$$

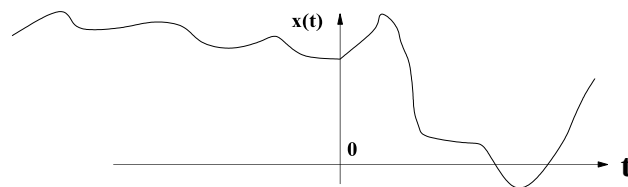


Cela revient à ne retenir que les valeurs de la fonction continue $f(t)$ aux instants d'échantillonnage, à savoir aux instants $t = T, 2T, 3T \dots$

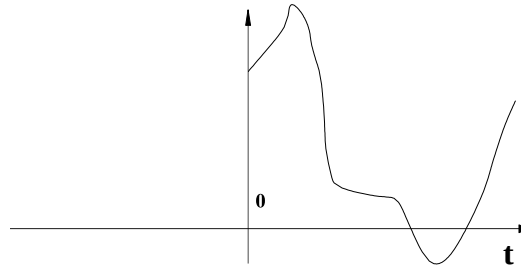
-5) Causalité

Un signal $x(t)$ est dit causal ssi $x(t) = 0, \forall t < 0$.

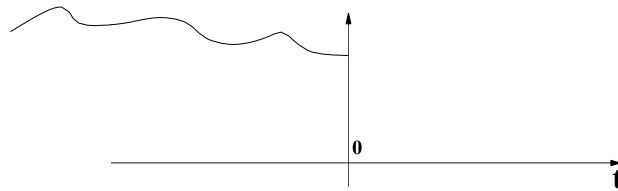
Un signal $x(t)$ est dit anti-causal ssi $x(t) = 0, \forall t > 0$.



signal complet



partie causale de x(t)



partie anti-causale de x(t)

Remarque : Dans le cas d'un filtre que l'on veut réaliser en temps réel, il va de soit que sa réponse ne peut être que postérieure à l'excitation. C'est pourquoi, on imposera que sa réponse impulsionnelle soit causale.

-6) Parité

Un signal $x(t)$ est pair si $x(t) = x(-t)$.

Un signal $x(t)$ est impair si $x(t) = -x(-t)$.

Tout signal réel $x(t)$ est la somme d'un signal pair $x_p(t)$ et d'un signal impair $x_i(t)$:

$$- x(t) = x_p(t) + x_i(t), \quad - x_p(t) = (1/2) [x(t) + x(-t)]$$

7) Valeur moyenne

2

$$- x_i(t) = (1/2) [x(t) - x(-t)]$$

Définition

Soit un signal périodique de valeur instantanée $i(t)$, de période T , sa valeur moyenne notée $\langle i \rangle$ ou I s'exprime par la relation :

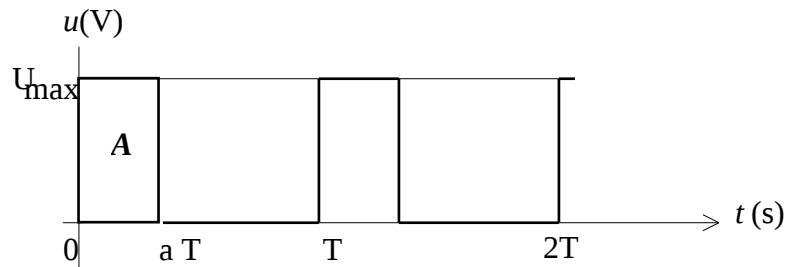
$$\langle i \rangle = I = (1/T) \int_0^T i(t) dt$$

L'intensité moyenne d'un signal périodique est égale à l'intensité d'un courant continu qui transporterait la même quantité d'électricité, dans le même circuit et dans le même temps.

Calcul

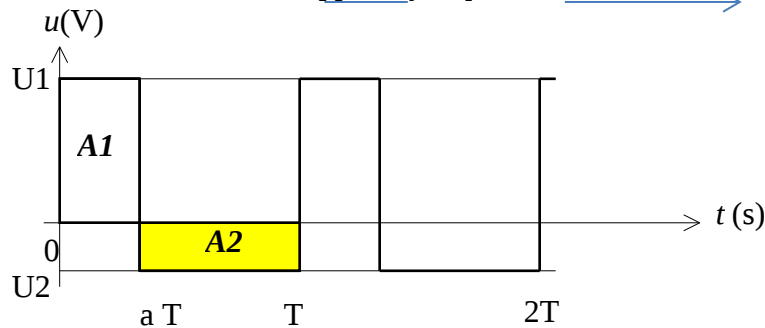
Le calcul d'intégrale se ramène à un calcul d'aire.

Exemple 1 : créneau de rapport cyclique a , de valeur maximale $U_{\max}$



$$\langle u \rangle = A/T = (U_{\max} \cdot aT)/T = aU_{\max}$$

Exemple 2 : créneau bidirectionnel de rapport cyclique a , de valeurs maximales $U_1 > 0$ et $U_2 < 0$



$$\langle u \rangle = \frac{A1 - A2}{T} = \{[U1 \times aT] + [U2 (1-a)T]\}/T = a(U1 - U2) + U2$$

N.B : La valeur moyenne peut être positive ou négative, elle est nulle pour un signal symétrique. Elle est indépendante de la période T du signal.

8) Valeur efficace

Définition

Soit un signal périodique de valeur instantanée $i(t)$, de période T , sa valeur efficace notée I s'exprime par la relation :

$$I^2 = (1/T) \int_0^T i^2(t) dt$$

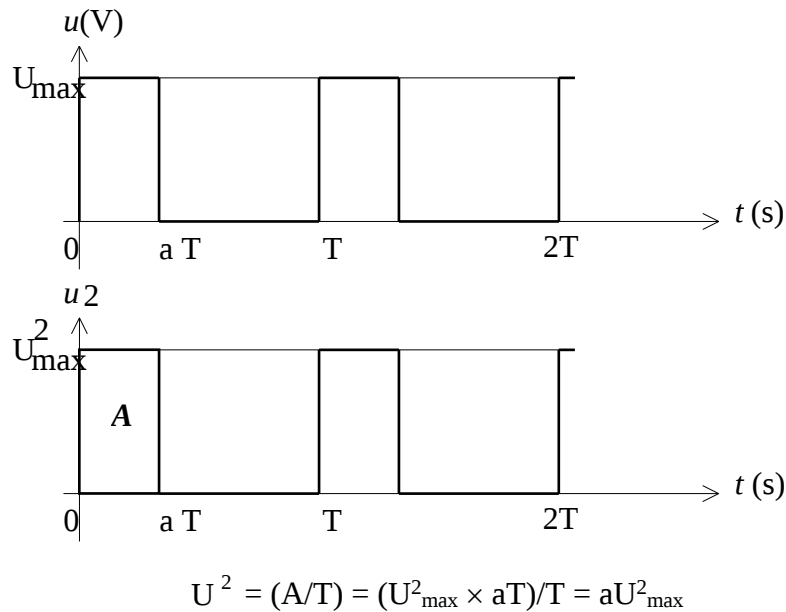
N.B. : I représente la moyenne quadratique de $i(t)$: $I = [\langle i^2 \rangle]^{1/2}$

L'intensité efficace d'un signal périodique est égale à l'intensité d'un courant continu qui consommerait la même énergie calorifique (effet Joule) dans le même circuit et dans le même temps.

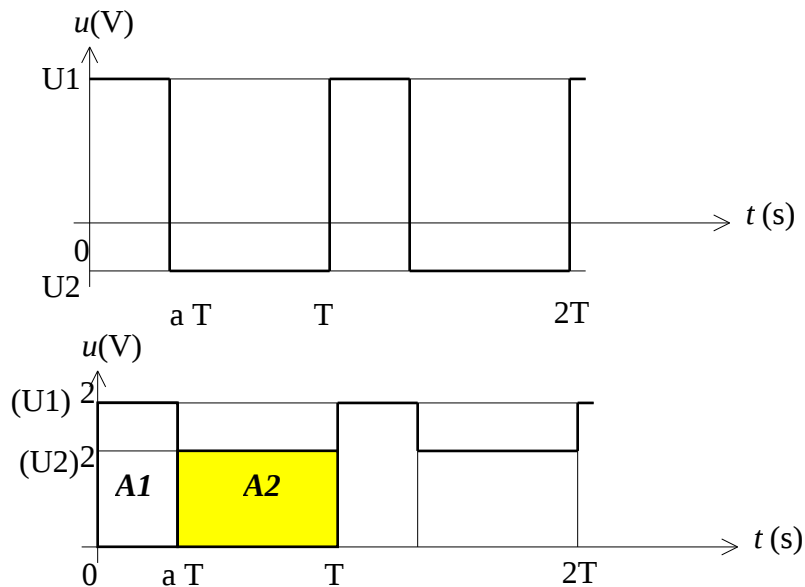
Calcul

Comme précédemment, le calcul d'intégrale se ramène à un calcul d'aire (sur le carré)

Exemple 1 :



Exemple 2 :



N.B : La valeur efficace est toujours supérieure ou égale à la valeur moyenne. Elle est toujours positive. Comme la valeur moyenne, la valeur efficace est indépendante de la période T du signal.

Chapitre 02: SERIES DE FOURIER

2.1 Introduction

On s'attache ici pour l'essentiel à l'étude du problème suivant :

Une fonction périodique $f(x)$ de période T peut-elle s'exprimer comme une somme d'une série trigonométrique :

$$\sum (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x) \text{ avec } \omega = 2\pi/T.$$

Etudié par Fourier au début du dix-neuvième siècle dans sa recherche de solutions de l'équation de la chaleur (équation de diffusion), ce problème conduit à une branche des mathématiques toujours vivante.

2.2 Fonctions périodiques

Une fonction $f(x)$ est dite périodique de période T si :

$$\forall x, f(x + T) = f(x) \tag{1}$$

(où T est une constante réelle positive). La plus petite des valeurs de $T > 0$ est appelée _
moindre période _ ou _ période _ de $f(x)$. On dit encore que la fonction $f(x)$ est T -périodique.

Exemples :

- $\sin x$ a pour période $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$ a pour moindre période 2π ;
- $\sin nx$ a pour moindre période $2\pi/n$

2.3 : Définition des séries de Fourier

Soit $f(x)$ une fonction définie sur un intervalle $] -L, L[$ et déterminée à l'extérieur de l'intervalle par $f(x + 2L) = f(x)$, c'est-à-dire supposons $f(x)$ de période $T = 2L$.

Définition (Série de Fourier) :

La série de Fourier correspondant à $f(x)$ est définie par :

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi x/L + b_n \sin n\pi x/L)$$

où les coefficients a_n et $b_n \forall n \in \mathbb{N}$ sont appelés coefficients de Fourier et valent :

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos n\pi x/L \, dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin n\pi x/L \, dx$$

Remarquons que les fonctions trigonométriques $\cos n\pi x/L$ et $\sin n\pi x/L$ sont de période $2L/n$ c'est-à-dire de fréquences égales à $n/2L$ c'est-à-dire des multiples entiers de fois la fréquence de la fonction $f(x)$ qui vaut $1/2L$

Notons que :

$$a_0/2 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \, dx$$

est la **moyenne** de $f(x)$ sur une période.

Remarque : autres notations utilisées en théorie du signal :

En théorie du signal, on utilise la variable temporelle t , on note T la période (au lieu de $2L$) et on introduit son inverse $f = 1/T$ qui est appelée la fréquence fondamentale du signal ; la quantité $n\pi x/L$ devient alors $2\pi t/T = 2\pi nft$ ce qui peut s'interpréter comme un multiple entier n de fois la fréquence fondamentale du signal $f = 1/T$ multipliée par 2π .

• Dans ce contexte, le coefficient $a_0/2$ est la **valeur moyenne du signal** $f(t)$ puisque :

$$a_0/2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \, dt$$

Ce terme est appelé la **composante continue** ou encore valeur DC du signal.

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) \, dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) \, dt$$

• Le terme $a_1 \cos 2\pi t/T + b_1 \sin 2\pi t/T$ est appelé la **fondamentale** du signal ou encore la **première harmonique** du signal.

• Le terme $a_n \cos 2n\pi t/T + b_n \sin 2n\pi t/T$ est appelé la **nième harmonique** du signal.

- Si $f(t)$ est une fonction réelle, alors les coefficients a_0 , a_n et b_n sont réels.
- Si $f(t)$ est une fonction paire, alors les coefficients des sinus sont tous nuls : $b_n = 0 \forall n > 0$.
- Si $f(t)$ est une fonction impaire, alors les coefficients des cosinus sont nuls : $a_n = 0 \forall n > 0$.

Ces propriétés peuvent parfois simplifier remarquablement les calculs

2.4 : Série de Fourier sur la base des exponentielles complexes

Est-il possible de re-exprimer le développement en série de Fourier en notation complexe ?

Il est facile de deviner que la réponse est affirmative. Il suffira en fait de réécrire les fonctions sinus et cosinus comme $\cos \alpha = (e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) / 2$ $\sin \alpha = (e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}) / 2j$ et de réarranger les termes pour obtenir le développement en série de Fourier sur la base des exponentielles complexes:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t}$$

Remarquons que la série comporte maintenant des termes allant de $-\infty$ à $+\infty$, à la différence du développement en sinus et cosinus. Les coefficients de la série C_n , peuvent être déterminés directement par le réarrangement des termes de la série à partir des a_n et b_n .

On obtient les relations suivantes, toutes valables pour n positif :

$$C_0 = a_0$$

$$C_n = (a_n - jb_n)/2$$

$$C_{-n} = (a_n + jb_n)/2$$

Comme on décompose maintenant $x(t)$ sur des fonctions complexes, il est normal que les coefficients C_n soient aussi complexes. On peut déduire les propriétés générales des coefficients C_n à partir des propriétés des a_n et b_n :

– Si la fonction $f(t)$ est réelle, alors les a_n et b_n sont réels et, par conséquent,

$$C_n = \text{conjugué}(C_{-n})$$

– Si $f(t)$ est paire, alors $b_n = 0$ implique $C_n = C_{-n}$;

– Si $f(t)$ est impaire, alors $a_n = 0$ implique $C_n = -C_{-n}$;

– si donc $f(t)$ est réelle et paire, les C_n sont réels et tels que $C_n = C_{-n}$,

– et si $f(t)$ est réelle et impaire, les C_n sont imaginaires purs et tels que $C_n = -C_{-n}$.

Les coefficients de la série peuvent être aussi déterminés indépendamment du développement sur les fonctions sinus et cosinus, et on prouve qu'ils s'écrivent de manière équivalente comme suit :

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t} dt$$

2.5 : Spectre d'amplitude et de phase

Le spectre d'amplitude (ou de phase) permet de représenter la variation de l'amplitude (ou de la phase) du signal en fonction de la fréquence.

le spectre d'amplitude est la représentation du terme C_n $n=0 \dots \infty$ en fonction des fréquences $n\omega_0$ avec :

$$C_n = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2}$$

Le spectre de phase est donné par:

$$\phi_n = \arctg(-b_n / a_n)$$

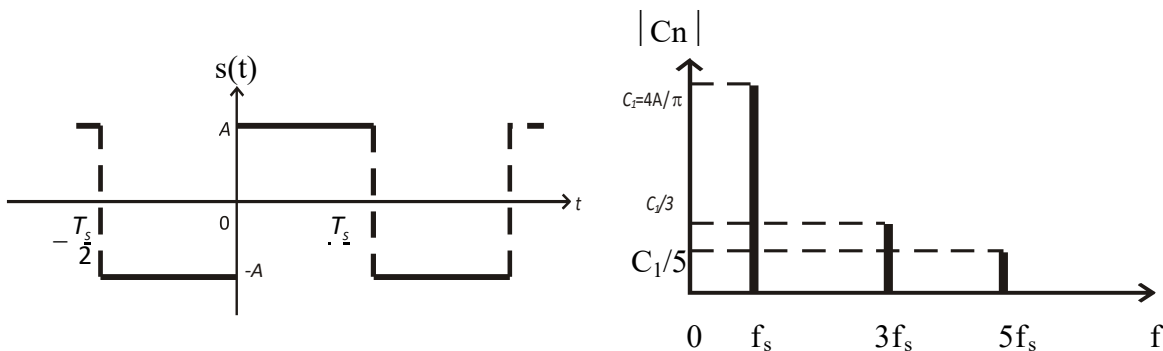
Remarques importantes

- Le spectre d'amplitude d'un signal périodique est toujours un spectre de raies situées au niveau des fréquences multiples de la fréquence périodique du signal $n f_1$.
- Le spectre d'amplitude contient l'information sur l'amplitude et sa variation en fonction de la fréquence, c'est la raison qui lui donne une certaine priorité dans son utilisation par rapport au spectre de phase (dans certains domaines comme l'électronique par exemple), mais si le traitement tient compte de la forme du signal (traitement d'images), il ne faut jamais négliger le spectre de phase.

Exemple :

Soit $s(t) = -A$ pour $t \in] -T_s/2, 0 [$

$= A$ pour $t \in] 0, T_s/2 [$



Signal impair, donc $a_n = 0 \quad \forall n \geq 0$

$$b_n = \frac{2}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} s(t) \sin n\omega_s t dt = \frac{4A}{T_s} \int_0^{T_s/2} \sin n\omega_s t dt = \left(\frac{4A}{T_s} \right) \left(\left[\frac{\cos n\omega_s t}{n\omega_s} \right]_0^{T_s/2} \right)$$

$$= 2A/\pi \{ [1 - (-1)^n] / n \}$$

Soit $n=2p$ alors $b_{2p}=0$

Soit $n=2p+1$ alors $b_{2p+1} = 4A / \pi (2p+1)$

$$\text{D'où : } s(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} [\sin(2p+1) \omega_s t / (2p+1)]$$

2.6 Identité de Parseval

Si a_n et b_n sont les coefficients de Fourier de la série correspondant à $f(x)$, si $f(x)$ satisfait aux conditions de Dirichlet, et si la série de Fourier converge uniformément vers $f(x)$, alors on a la formule suivante :

Théorème 2.21 (Identité de Parseval) :

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)^2 dx = a_0^2 / 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Preuve : Si $f(x)$ satisfait aux conditions de Dirichlet (f est continue sur un intervalle $[a,b]$, f est dérivable par morceaux ou par tranches sur I et $\forall x_0 \in I$ $f(x_0^+)$ et $f(x_0^-)$ sont finies et existent), on a en tout point de continuité :

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L})$$

Cette identité est en fait valable $\forall x$ si la série de Fourier converge uniformément, parce qu'alors $f(x)$ est continue en tout point.

Multiplions par $f(x)$ et intégrons terme par terme entre $-L$ et L (ce qui est justifié comme la série converge uniformément). On obtient :

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x)^2 dx &= (a_0/2) \int_{-L}^L f(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \{ a_n \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \} \\ &= (a_0^2/2)L + L \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \end{aligned}$$

En divisant par L , on obtient l'identité de Parseval.

L'identité de Parseval se réécrit comme suit en termes des coefficients complexes :

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

Chapitre 03

SYSTEMES LINEAIRES

3.1 : Définition d'un système

Un système est un processus physique représenté par un modèle mathématique ou tout simplement un modèle théorique. Le système peut être un circuit électrique, équation chimique, moteur électrique,...etc.

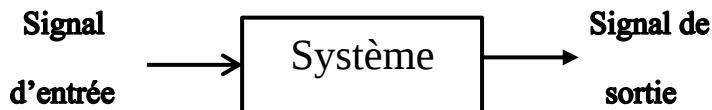


Figure I.1. Systèmes et signaux d'entrée et de sortie

- Exemple

Soit le circuit électrique suivant :

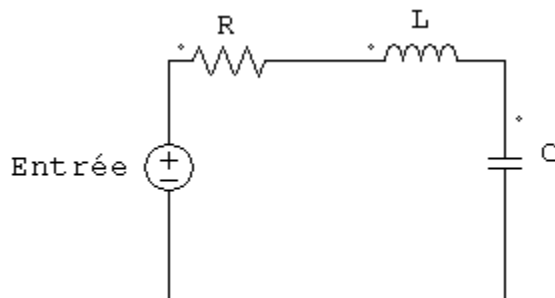


Figure I.2. Système électrique

La relation entre l'entrée et la sortie est donnée par le modèle du système.

3.2 Système linéaire

Un système est dit linéaire si les deux principes suivants sont satisfaits :

□ Principe de superposition

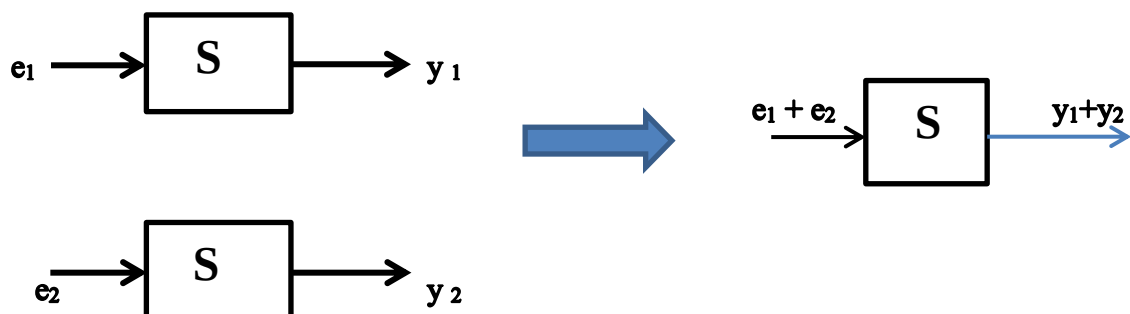


Figure I.5. Système linéaire

Si nous avons :

$$y_1(t) = S(e_1(t))$$

$$y_2(t) = S(e_2(t)) \quad \Rightarrow \quad (y_1 + y_2)(t) = S(e_1(t) + e_2(t))$$

Nous avons aussi :

$$y_1(t) = S(e_1(t)) \Rightarrow S(\lambda e_1(t)) = \lambda y_1(t)$$

Donc en résumé :

$$S(ae_1(t) + be_2(t)) = aS(e_1(t)) + bS(e_2(t))$$

- Exemple

Un système est décrit par l'équation suivante donnant la sortie $y(t)$ en fonction de l'entrée $x(t)$.

$$y(t) = 3x(t) + 4$$

$$\text{On aura : } y_1(t) = 3x_1(t) + 4$$

$$y_2(t) = 3x_2(t) + 4$$

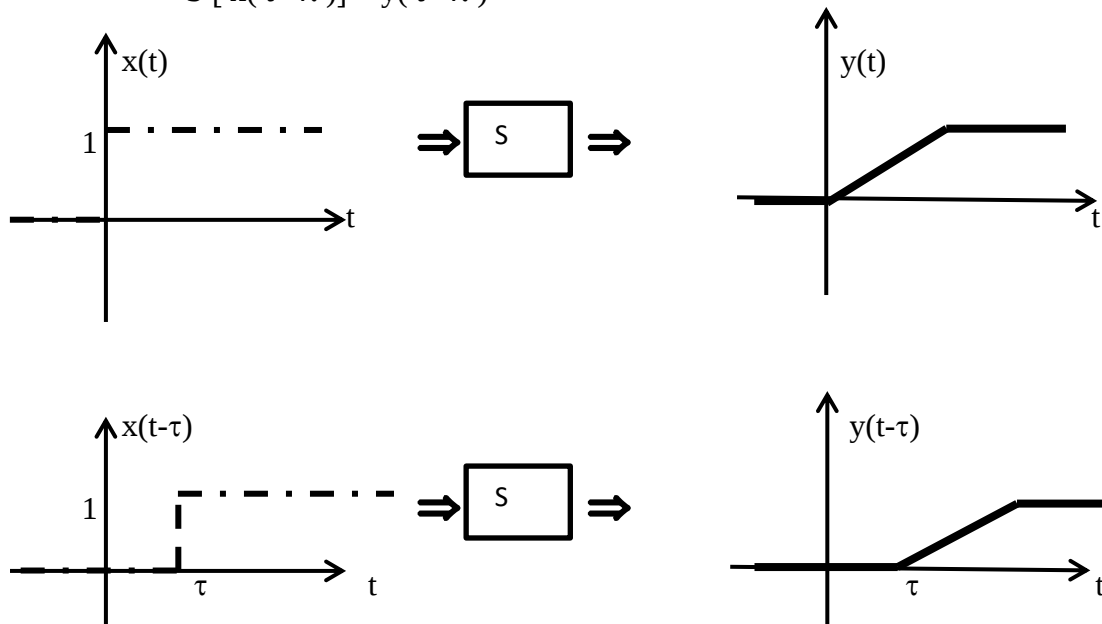
$$\text{Donc ; } y_1(t) + y_2(t) = 3x_1(t) + 4 + 3x_2(t) + 4 = 3[x_1(t) + x_2(t)] + 8$$

$$\neq 3[x_1(t) + x_2(t)] + 4 \Rightarrow \text{Donc : le système est non linéaire.}$$

3.3 Système à temps invariant

Un système est à temps invariant lorsqu'une translation du signal d'entrée (retard ou avancement) se traduit par la même translation du signal de sortie.

$$S[x(t - \lambda)] = y(t - \lambda)$$



3.4 : Convolution

Nous allons maintenant étudier les relations entre les signaux et les systèmes, entre les entrées des systèmes et leurs sorties, ...etc.

Avant de commencer, deux définitions importantes sont à présenter :

- Définition de la réponse indicielle

La réponse indicielle est la réponse d'un système dont l'entrée est un échelon.

- Définition de la réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle est la réponse d'un système physique dont l'entrée est une impulsion de Dirac. Elle permet de caractériser les systèmes linéaires dans le domaine temporel.

3.5 : Définition du produit de convolution

La convolution est la réponse d'un système à une entrée quelconque.

Soit $x(t)$: l'entrée à un système (S) linéaire et invariant dans le temps et dont la réponse impulsionnelle est $h(t)$; $y(t)$ est la sortie de (S) à l'entrée $x(t)$.

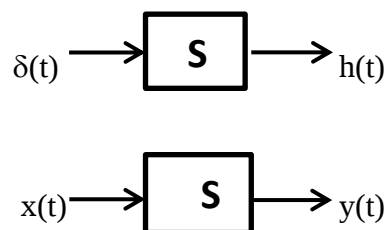


Figure II.1. Présentation d'un système LTI

Le signal $x(t)$ peut être représenté par une somme infinie de composantes $x(\tau)$ sur une base d'impulsions de Dirac comme suit :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(\tau - t) d\tau$$

Ou bien : $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$ car $\delta(t-\tau)$ est obtenu à partir de $\delta(\tau-t)$ par une rotation autour de l'axe de translation $\tau = t$; donc identique à lui-même.

On pose (f), l'application dans le temps qui donne la sortie du système (S) à l'entrée $x(t)$,

c'est-à-dire : $f : x(t) \rightarrow y(t) = f(x(t))$

Nous aurons donc :

$$y(t) = f(x(t)) = f\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \right\}$$

$$y(t) = f(x(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau)$$

Puisque l'application (f) n'a aucune relation avec la variable τ , cette dernière n'est qu'une variable muette qui disparaît lors de l'intégration, on peut écrire :

$$y(t) = f(x(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) f(\delta(t - \tau)) d\tau$$

Rappelons que la réponse impulsionnelle est la réponse du système (S) avec l'application f à une entrée de type Dirac, donc :

$$f(\delta(t - \tau)) = h(t - \tau)$$

On trouvera donc :

$$y(t) = f(x(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

On définit donc le produit de convolution :

Si le système est LTI (Linear Time Invariant), nous avons :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Après un changement de variable : $\tau' = t - \tau$

$$\text{On déduit : } y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau') h(\tau') d\tau'$$

$$\text{Donc : } y(t) = x(t) * h(t)$$



Le produit de convolution

3.6 : Propriétés du produit de convolution

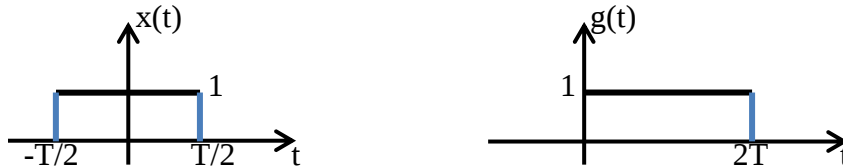
- $x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$
- $(x(t) * y(t)) * z(t) = x(t) * (y(t) * z(t))$
- $x(t) * (y(t) + z(t)) = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$
- $x(t) * \delta(t) = x(t)$ car $\delta(t)$ est l'élément neutre.
- $x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$
- $x(t) * e(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$

Le produit de convolution est un produit bilinéaire et commutatif, généralement noté « * », c'est un opérateur qui fait correspondre aux deux fonctions f et g une autre fonction $f*g$ sur le même domaine de définition que f et g .

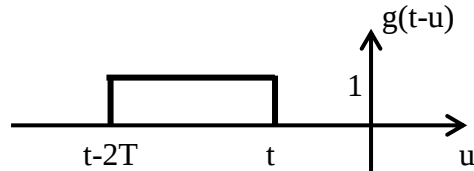
3.7 : Explication graphique du produit de convolution

On peut expliquer le produit de convolution par un simple exemple :

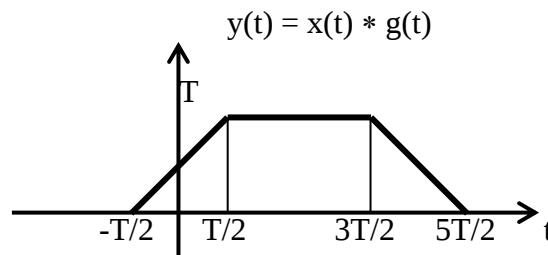
Soit les deux signaux $x(t)$ et $g(t)$ représentés sur la figure ci-dessous :



D'où :



et :



3.8 : Système causal

Un système est dit causal si la sortie $y(t)$ à l'instant initial $t = t_0$ dépend uniquement de

l'entrée aux instants $t \leq t_0$. C'est-à-dire que la sortie à un instant donné ne peut pas dépendre de l'entrée $x(t)$ dans le futur. L'effet ne peut précéder la cause. Dans ces conditions, il est clair que $h(t) = 0$ pour $t < 0$. Alors,

$$\begin{aligned} y(t) = x(t) * h(t) &= \int_0^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^t x(\tau) h(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

Pour un système causal.

Exemple :

$y = a x(t + 5)$ est un signal non causal car $h(t) = a\delta(t + 5)$ et la sortie ne peut précéder l'entrée.

Remarque :

Les systèmes réalisables sont pratiquement causaux.

3.9 : Système stable.

Un système est dit stable si à toute entrée bornée ($x(\tau) \leq M \quad \forall \tau$) correspond une sortie bornée.

Soit :

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau) x(t - \tau)| d\tau \\ &\leq M \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau \end{aligned}$$

Pour que le système soit stable, on a vu que la sortie devait être bornée, soit :

$$\int_0^{+\infty} |h(\tau)| d\tau \leq +\infty \quad \text{car } h(t) \text{ est causale.}$$

CHPITRE IV

TRANSFORMATION DE FOURIER

4.1 : Introduction

Lorsqu'un signal est périodique de période $T_0 = 1/f_0$, son spectre fait apparaître des *raies* distantes de f_0 et correspondant aux diverses harmoniques présentes dans le signal. Bien entendu, plus la période T_0 est élevée, plus les raies se rapprochent. Si l'on pousse le raisonnement à sa limite, un signal *apériodique* peut être interprété comme un signal périodique de période infinie. L'espace entre les raies se réduit alors à zéro et le spectre, au lieu d'être composé de plusieurs raies espacées, se transforme en une courbe continue où tous les points viennent se toucher. On ne peut alors plus vraiment parler d'harmoniques de rang n . L'espace fréquentiel n'est plus discret mais continu (le spectre, quel qu'il soit, est défini pour toute valeur de f).

Si on regarde la conséquence mathématique, on se réfère à la formule :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

qui ne s'applique que pour les signaux périodiques.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1/T_0 \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(\tau) e^{-jn\omega_0 \tau} d\tau) e^{jn\omega_0 t}$$

On vient de voir que dans le cas où $x(t)$ est périodique, la fréquence f ne contribue à la représentation fréquentielle du signal que si elle est un multiple de la fréquence fondamentale f_0 . Autrement dit, on considère que $f = n f_0$, où n indique le « numéro » de la raie spectrale. On voit bien apparaître n dans la formule ci-avant.

Dans le cas apériodique, on peut toujours considérer

$$f = n f_0 = n/T_0$$

Mais en notant que $T_0 \rightarrow \infty$ (ou $f_0 \rightarrow 0$). Ainsi, les raies spectrales se « collent » les unes aux autres et f devient une variable continue (elle peut prendre toutes les valeurs réelles). Il convient donc de remplacer la somme discrète (symbolisée par le $\sum$) par une somme continue, c.-à-d. une intégrale, en f , en notant bien que :

$$\begin{aligned} f = n/T_0 &\Rightarrow dn = T_0 df, \\ T_0 &\rightarrow \infty, \\ \omega_0 T_0 &= 2\pi \end{aligned}$$

Ceci conduit à :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-2j\pi f \tau} d\tau \right) e^{2j\pi n f_0 t} dn$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-2j\pi f \tau} d\tau \right) e^{2j\pi f t} df$$

$\longleftrightarrow$
 $X(f)$

$$\Leftrightarrow X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-2j\pi f \tau} d\tau$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{2j\pi f t} df$$

$X(f)$ est une fonction qui est indépendante du temps. C'est une fonction complexe que l'on peut écrire sous la forme module et phase : $X(f) = |X(f)| \exp(j\phi(f))$ ou sous la forme de partie réelle et de partie imaginaire :

$X(f) = \text{Re}(X(f)) + j \text{Im}(X(f))$ avec :

$$\text{Re}(X(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(\omega t) dt \quad \text{et} \quad \text{Im}(X(f)) = - \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(\omega t) dt .$$

Remarque : Si $x(t)$ est pair $\Rightarrow \text{Re}(X(f)) = 2 \int_0^{\infty} x(t) \cos(\omega t) dt$ $\text{Im}(X(f)) = 0$
 Si $x(t)$ est impair $\Rightarrow \text{Re}(X(f)) = 0$ $\text{Im}(X(f)) = - 2 \int_0^{\infty} x(t) \sin(\omega t) dt$

En écriture complexe, on a : $X(f) = X(\omega) = |X(f)| e^{j\phi(f)} = A(f) + j B(f)$,
 Où $|X(f)|$ et $\phi(f)$ sont respectivement les modules et phase de $X(f)$, avec

$$|X(f)| = \sqrt{A(f)^2 + B(f)^2} \quad \text{qui est le spectre d'amplitude}$$

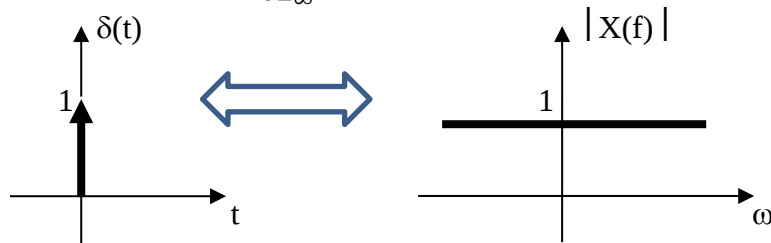
$$\phi(f) = \arctg \left(\frac{B(f)}{A(f)} \right) \quad \text{qui est le spectre de phase}$$

Exemples de transformée de Fourier :

Exemple1 : On prend $x(t) = \delta(t)$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega(0)} dt$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$



Spectre d'amplitude de l'impulsion de Dirac

On remarque que le spectre fréquentiel de l'impulsion de Dirac contient toutes les fréquences de $-\infty$ à $+\infty$.

Exemple 2 : On prend $x(t) = e^{-t} e(t)$.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t} e(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-j\omega t} dt$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1+j\omega)t} dt = \frac{-1}{1+j\omega} [e^{-(1+j\omega)t}]_0^{+\infty}$$

$$X(f) = \frac{1}{1+j\omega}$$

Les spectres d'amplitude et de phase sont donnés comme suit :

$$|X(f)| = 1 / \sqrt{1 + \omega^2}$$

$$\phi(f) = -\arctg(\omega)$$

Tracez ces deux spectres.

Exemple 3 : Fonction rectangulaire $\text{Arect}_T(t) = A$ si $t \in [-T/2, T/2]$
 0 ailleurs

Il suffit d'écrire la définition de la transformée de Fourier :

$$X(f) = \text{TF} \{ \text{Arect}_T(t) \} = A \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi f t} dt,$$

$$X(f) = A \left[\frac{\exp(-j2\pi f)}{-j2\pi f} \right]_{-T/2}^{T/2} = A \frac{1}{j2\pi f} [e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}]$$

$$X(f) = AT \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = AT \operatorname{sinc}(\pi f T)$$

Où $\operatorname{sinc}(\cdot)$ est la fonction *sinus cardinal*. On notera que la transformée de Fourier obtenue est purement réelle, et paire. Par ailleurs, cette transformée s'annule pour $\pi f T = k\pi$, soit tous les $f = k/T$; sauf pour $k = 0$, puisque $\operatorname{sinc}(t) = 1$ pour $t \rightarrow 0$.

Tracez son spectre d'amplitude.

4.2 : Conditions d'existence de la TF.

Tous les signaux ne possèdent pas obligatoirement des TF, pour qu'un signal $x(t)$ ait une TF, il faut et il suffit qu'il vérifie les conditions de Dirichlet qui sont valables aussi bien pour la transformée de Fourier et celle de Laplace.

- * Il faut que le signal $x(t)$ soit intégrable : $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$
- * Le signal $x(t)$ possède un nombre fini d'extrémums (maximums ou minimums) dans chaque intervalle de temps fini
- * Le signal $x(t)$ a un nombre fini de discontinuités dans chaque intervalle de temps fini.

4.3 : Propriétés de la Transformée de Fourier

Les propriétés de la TF sont les suivantes :

• Linéarité

$$\text{Si } x_1(t) \xrightarrow{\text{TF}} X_1(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\text{et } x_2(t) \xrightarrow{\text{TF}} X_2(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\begin{aligned} \text{Alors : } a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) &\xrightarrow{\text{TF}} \int_{-\infty}^{+\infty} [a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)] e^{-j\omega t} dt \\ a_1 \text{ et } a_2 \in \mathbb{R} & \\ &= a_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) e^{-j\omega t} dt + a_2 \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega) \end{aligned}$$

• Décalage temporel :

$$\text{Si } x(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\text{Alors } x(t - t_0) \xrightarrow{\text{TF}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) e^{-j\omega t} dt$$

$$\text{Changement de variable : } \tau = t - t_0 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega(\tau + t_0)} d\tau$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} [x(\tau) e^{-j\omega\tau} e^{-j\omega t_0}] d\tau \\
&= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\
&= e^{-j\omega t_0} X(\omega)
\end{aligned}$$

Conclusion : La TF $\{x(t - t_0)\}$ possède le même spectre d'amplitude que $X(\omega)$ mais un spectre de phase décalé de $-\omega t_0$.

• Décalage fréquentiel

$$\text{Si } x(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\begin{aligned}
\text{Alors } e^{j\omega_0 t} x(t) &\xrightarrow{\text{TF}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 t} x(t) e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt \\
&= X(\omega - \omega_0)
\end{aligned}$$

Conclusion : La TF $\{e^{j\omega_0 t} x(t)\}$ possède le même spectre de phase que $X(\omega)$ mais un spectre d'amplitude décalé de ω_0 .

• Changement d'échelle

$$\text{Si } x(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\text{Alors } x(at) \xrightarrow{\text{TF}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt$$

$$\text{On pose : } \tau = at \Rightarrow t = \frac{1}{a} \tau, \text{ donc : } dt = \frac{1}{|a|} d\tau$$

$$\begin{aligned}
x(at) &\xrightarrow{\text{TF}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j(\omega/a)\tau} \frac{1}{|a|} d\tau \\
&= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j(\omega/a)\tau} d\tau \\
&= \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)
\end{aligned}$$

• Dualité

Cette propriété s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned}
\text{Si } x(t) &\Leftrightarrow X(f) \\
\text{Alors } X(t) &\Leftrightarrow x(-f)
\end{aligned}$$

Ceci se démontre en débutant avec l'expression de $x(-t)$ en fonction de sa TF $X(f)$:

$$x(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{-2j\pi f t} df$$

En échangeant maintenant les variables t et f , on obtient :

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-2j\pi f t} dt \equiv \text{TF} \{X(t)\}$$

Exemple :

$$\text{On a vu que : } \text{Arect}_T(t) \Leftrightarrow \text{ATsinc}(\pi f T)$$

Si l'on a maintenant à calculer la transformée de Fourier inverse d'une fonction porte en fréquence, $\text{Arect}_B(f)$, il suffit d'invoquer cette propriété de dualité pour écrire

$$\text{ABsinc}(\pi t B) \Leftrightarrow \text{Arect}_B(-f)$$

La fonction rect étant paire, on en déduit :

$$\text{ABsinc}(\pi t B) \Leftrightarrow \text{Arect}_B(f)$$

Ceci montre que la transformée de Fourier d'un sinus cardinal, en temps, est une fonction porte en fréquence.

• **Conjugué de $x(t)$:**

$$\text{Soit : } x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

$$\text{Alors } \text{TF} \{ x^*(t) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j2\pi f t} dt \right)^*$$

$$= X^*(-f)$$

• **Dérivation :**

$$\text{Soit : } x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

$$\text{Alors } \text{TF} \{ x'(t) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} x'(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

On rappelle la propriété du produit scalaire de deux fonctions ; $\langle f'(t), g(t) \rangle = - \langle f(t), g'(t) \rangle$

$$\text{Donc : } \text{TF} \{ x'(t) \} = - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) (e^{-j2\pi f t})' dt$$

$$= - (-j2\pi f) \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= (j2\pi f) X(f)$$

$$\text{D'où : } \text{TF} \{ (d^n/dt^n) x(t) \} = (j2\pi f)^n X(f)$$

• **Convolution :**

Nous avons vu que la sortie d'un système linéaire invariant $y(t)$ était donnée par :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

La question est de déterminer $Y(f)$ la transformée de Fourier de $y(t)$?

$$Y(f) = \text{TF} \{ y(t) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \right\} e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ x(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) e^{-j2\pi f t} dt \right\} d\tau$$

$$\xrightarrow{\text{H(f) } e^{-j2\pi f \tau}}$$

$$= H(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

$$\xrightarrow{\text{X(f)}}$$

$$= H(f) \cdot X(f)$$

Conclusion : La **convolution** dans le domaine temporel devient un **produit** dans le domaine fréquentiel. De même un **produit** dans le domaine temporel devient une **convolution** dans le domaine fréquentiel.

Exemple 01 : $x(t) * \delta(t)$?

$$\text{TF} \{ x(t) * \delta(t) \} = \text{TF}\{x(t)\} \times \text{TF} \{ \delta(t) \} = X(f) \times (1) = X(f)$$

Par la TF^{-1} appliquée aux deux côtés de l'égalité, on obtient :

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

Exemple 02 : $x(t) * \delta(t-t_0)$?

$$\text{TF}\{ x(t) * \delta(t-t_0) \} = \text{TF}\{x(t)\} \times \text{TF} \{ \delta(t-t_0) \} = X(f) \cdot e^{-j2\pi f t_0}$$

Par la TF^{-1} appliquée aux deux côtés de l'égalité, on obtient :

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$

4.4 : Théorème de Parseval

$$\begin{array}{ccc} |x(t)|^2 & = & x(t) \cdot x^*(t) \\ \text{TF} \downarrow & & \text{TF} \downarrow \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 e^{-j2\pi f t} dt & = & \text{TF}\{x(t)\} * \text{TF}\{x^*(t)\} \\ & = & X(f) * X^*(-f) \\ & = & \int_{-\infty}^{+\infty} X(f') \cdot X^*[-(f-f')] df' \end{array}$$

Les deux expressions de cette égalité vont dépendre, au final, après intégration de la variable **f** ; donc, ces deux expressions sont valables $\forall f$ variant de $-\infty$ à $+\infty$. A fortiori, pour **f = 0**.

En remplaçant f par 0 dans les deux expressions, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f') X^*(f') df'$$

Ce qui nous donne l'égalité suivante !

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f')|^2 df'$$

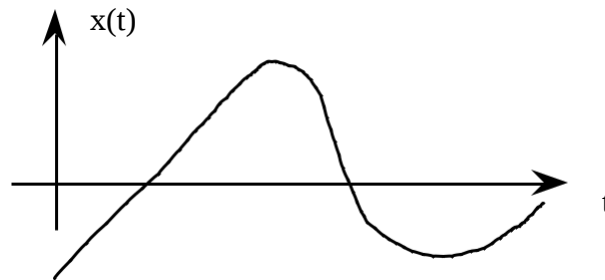
Qui est l'égalité de PARSEVAL, et qui stipule que l'énergie d'un signal se conserve, indépendamment, qu'on la calcule dans le domaine temporel ou fréquentiel.

Chapitre V

ECHANTILLONNAGE

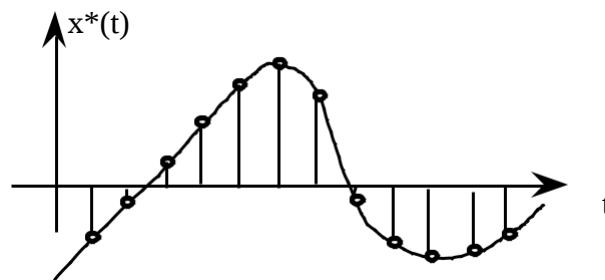
5.1 : Introduction

Soit un signal continu :

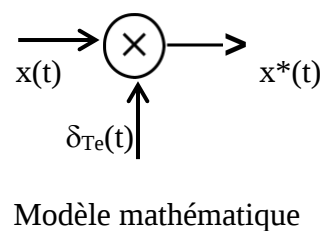
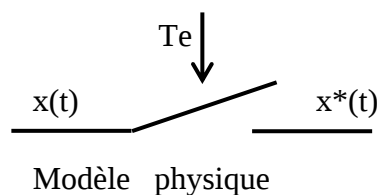


Si l'on veut traiter un signal par voie numérique à l'aide d'un ordinateur, il faut le représenter au préalable par une suite de valeurs numériques ponctuelles prélevées régulièrement. Un tel prélèvement est appelé *échantillonnage*.

Un échantillonnage représente un signal par une suite de valeurs ponctuelles :

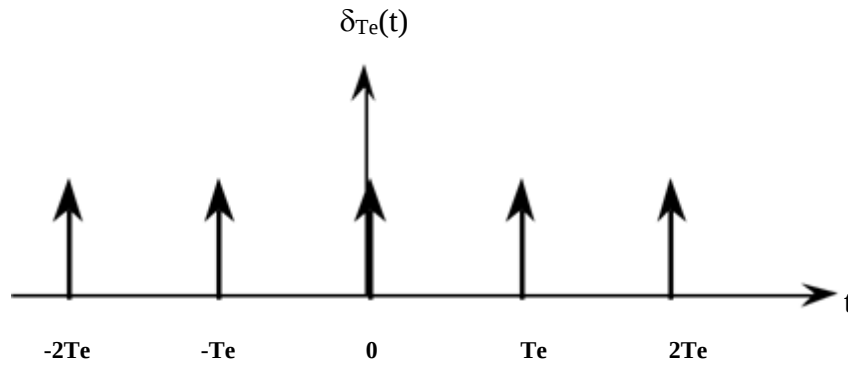


5.2 : modèle général d'un échantillonneur idéal



Le modèle physique est représenté par un interrupteur qui se ferme instantanément à la fréquence $f_e = 1/T_e$ pour générer une suite d'échantillons représentée par $x^*(t)$. Le modèle mathématique sur lequel nous baserons tous nos calculs est représenté par un multiplicateur à deux entrées. L'une des entrées est le signal à échantillonner $x(t)$, quant à la deuxième entrée, elle représente un train d'impulsions de Dirac ou une fonction Peigne $P_{gn}(t)$ telle que :

$$P_{gn}(t) = \delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$$



5.3 : Choix de la fréquence d'échantillonnage.

Lorsqu'on échantillonne un signal $x(t)$, on ne connaît que les valeurs $x(kT_e)$. Une question se pose : dans quelles conditions peut-on considérer que toute l'information contenue dans $x(t)$ est aussi contenue dans $x^*(t)$? Ou, en d'autres termes, peut-on reconstituer le signal $x(t)$ à partir des échantillons de $x^*(t)$ pour n'importe quelle valeur de la période d'échantillonnage T_e ?

Il paraît évident que si on a beaucoup d'échantillons (T_e très petit), on pourra reconstituer $x(t)$ assez facilement. Par contre, si le nombre d'échantillons est faible (T_e grand), il sera difficile de reconstituer les signaux, particulièrement de moyennes ou hautes fréquences.

5.4 : Spectre du signal échantillonné

D'après le modèle mathématique de notre échantillonneur, le signal échantillonné dans le domaine temporel est donné par :

$$x^*(t) = x(t) \delta_{T_e}(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$$

Le passage au domaine fréquentiel nous donne :

$$TF\{x^*(t)\} = TF\{x(t)\} * TF\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)\} \quad \text{Un produit devient une convolution} \quad (5.1)$$

La TF de $x(t)$ n'est rien d'autre que $X(f)$. Cherchons maintenant la TF de $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$.

$P_{gn}(t)$ est une fonction périodique, elle peut donc s'écrire sous la forme :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t} \quad \text{avec} \quad C_n = \frac{1}{T_e} \int_{-T_e/2}^{T_e/2} \delta(t) e^{-jn\omega t} dt$$

La fonction $P_{gn}(t)$ se limite entre $\frac{-T_e}{2}$ et $\frac{+T_e}{2}$ à $\delta(t)$ uniquement.

$$\int_{-T_e/2}^{T_e/2} \delta(t) e^{-jn\omega t} dt = \int_{-T_e/2}^{T_e/2} \delta(t) e^{-jn\omega t} dt = e^{-jn\omega 0} = 1 \quad \text{D'où : } C_n = \frac{1}{T_e}$$

La fonction $P_{gn}(t)$ s'écrira donc : $\frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{jn\omega t}$

Sa transformée de Fourier sera donnée par :

$$\begin{aligned} \text{TF} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{1} \cdot e^{jn\omega_e t} \right\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{1} \cdot e^{jn\omega_e t} \right\} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \dots + e^{-2j\omega_e t} + e^{-j\omega_e t} + 1 + e^{j\omega_e t} + e^{2j\omega_e t} + \dots \right\} e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

On a vu que : $\delta(t) \xrightarrow{\text{TF}} 1(f)$

On déduit que : $1(t) \xrightarrow{\text{TF}} \delta(-f) = \delta(f)$ propriété de dualité

$1(t) e^{-2j\omega_e t} \xrightarrow{\text{TF}} \delta(f + 2f_0)$ décalage fréquentiel

$1(t) e^{-j\omega_e t} \longrightarrow \delta(f + f_0)$

$1(t) \longrightarrow \delta(f)$

$1(t) e^{j\omega_e t} \longrightarrow \delta(f - f_0)$

$1(t) e^{2j\omega_e t} \longrightarrow \delta(f - 2f_0)$

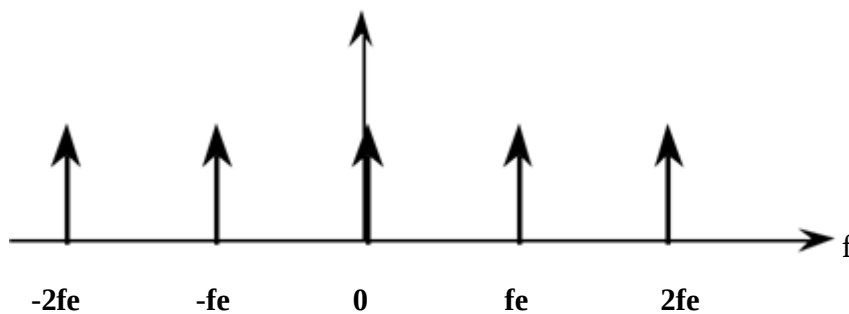
La TF de la fonction Pgn(t) sera alors donnée par :

$$\frac{1}{T_e} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_e) \right\} \quad f_e = \omega_e / 2\pi$$

Conclusion : La transformée de Fourier de la fonction périodique Pgn(t) dans le domaine temporel et de période Te est aussi une fonction périodique Pgn(f) dans le domaine

fréquentiel de période fe = $\frac{1}{T_e}$, et d'amplitude $\frac{1}{T_e}$.

$$\frac{1}{T_e} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_e) \right\}$$



Revenons maintenant à notre équation 5.1 :

$$\text{TF}\{x^*(t)\} = \text{TF}\{x(t)\} * \text{TF}\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)\right\}$$

$$X^*(f) = X(f) * \frac{1}{T_e} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_e) \right\}$$

$$= \frac{1}{T_e} X(f) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_e)$$

$$= \frac{1}{T_e} X(f) * [\dots \delta(f + 2f_e) + \delta(f + f_e) + \delta(f) + \delta(f - f_e) + \delta(f - 2f_e) + \dots]$$

$$= \frac{1}{T_e} \left\{ \dots X(f) * \delta(f + 2f_e) + X(f) * \delta(f + f_e) + X(f) * \delta(f) + X(f) * \delta(f - f_e) + \right.$$

$$\left. X(f) * \delta(f - 2f_e) + \dots \right\} \quad \text{Distributivité de la convolution par rapport à l'addition.}$$

Or, nous savons que : $X(f) * \delta(f + 2f_e) = X(f + 2f_e)$

$$X(f) * \delta(f + f_e) = X(f + f_e)$$

$$X(f) * \delta(f) = X(f)$$

$$X(f) * \delta(f - f_e) = X(f - f_e)$$

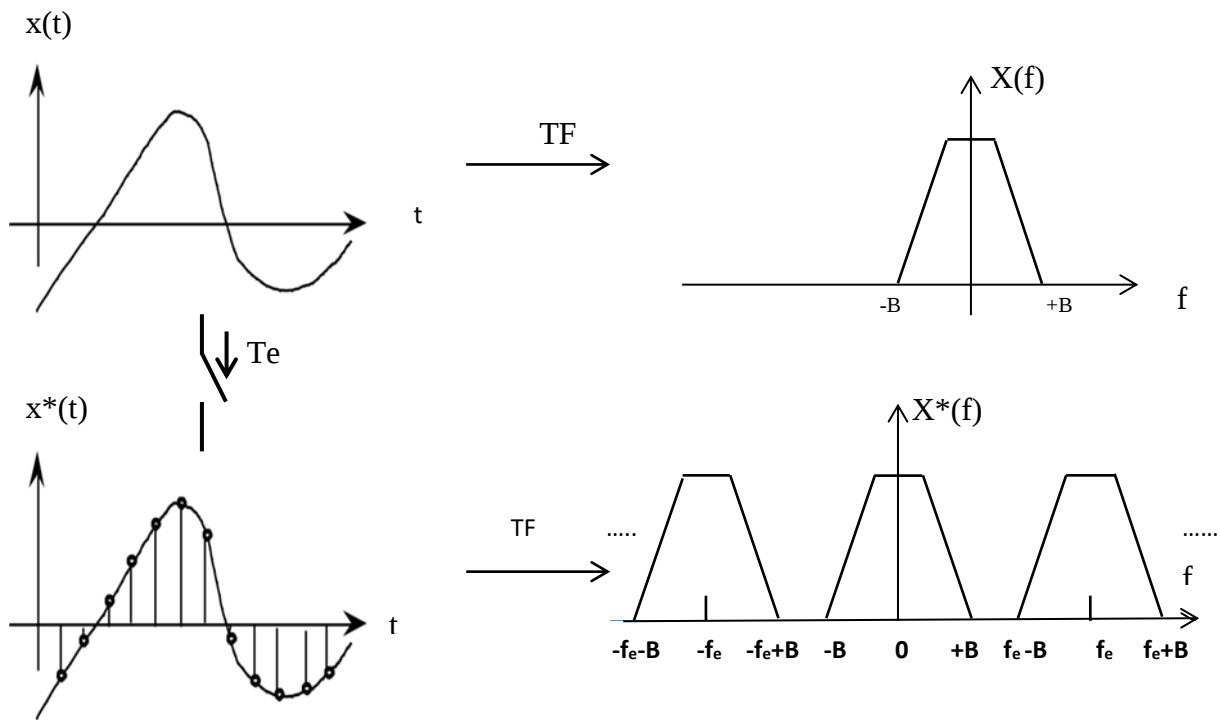
$$X(f) * \delta(f - 2f_e) = X(f - 2f_e)$$

Donc : $X^*(f) = \frac{1}{T_e} [\dots + X(f + 2f_e) + X(f + f_e) + X(f) + X(f - f_e) + X(f - 2f_e) + \dots]$

$$X^*(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nf_e)$$

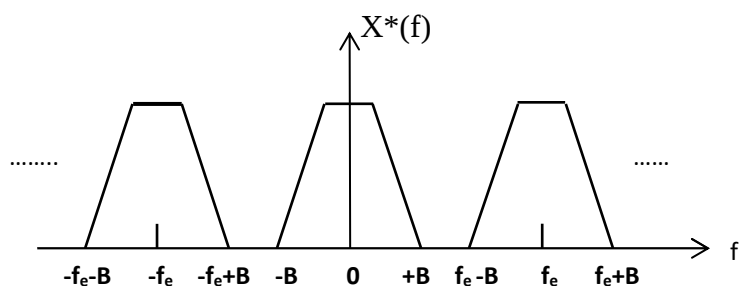
Conclusion : Cette relation montre que $X^*(f)$ est obtenue, à un facteur près ($1/T_e$), par une simple périodisation en fréquence du spectre $X(f)$ de largeur de bande $2B$. Le spectre est reproduit tous les $f_e = 1/T_e$. Cette périodisation peut s'effectuer suivant trois cas de figures :

Récapitulatif :

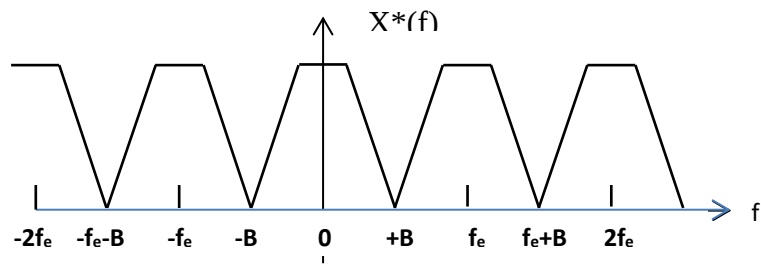


On voit bien que la forme du spectre du signal échantillonné $X^*(f)$ va dépendre de deux paramètres : La fréquence d'échantillonnage f_e et la largeur de bande de $X(f)$, soit $2B$.

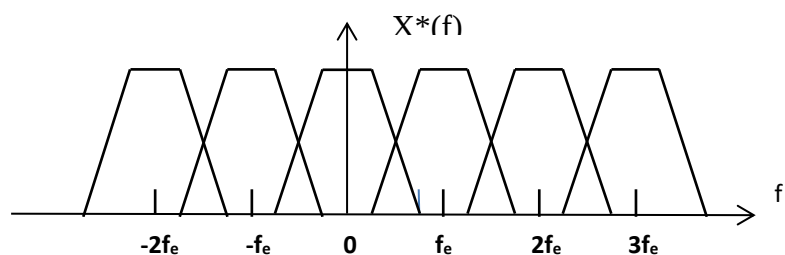
1^{er} cas : $f_e > 2B$



2^{em} cas : $f_e = 2B$



3^{em} cas : $f_e < 2B$



Nous avons vu qu'un échantillonnage était acceptable si, à partir du signal échantillonné $x^*(t)$, on pouvait reconstituer le signal de départ $x(t)$, et ceci, dans le domaine temporel.

De la même façon, mais dans le domaine fréquentiel cette fois-ci, on dira qu'un échantillonnage est acceptable si, à partir du spectre du signal échantillonné $X^*(f)$, on peut reconstituer le spectre du signal de départ $X(f)$.

La réponse à cette question se trouve dans les trois spectres de $X^*(f)$ tracés ci-dessus.

- Dans le premier cas où $f_e > 2B$, on peut facilement extraire le spectre du signal d'origine $X(f)$ par l'usage d'un filtre approprié.
- Dans le deuxième cas où $f_e = 2B$, il devient plus difficile de réaliser cette opération.
- Dans le troisième cas où $f_e < 2B$, il devient strictement impossible de réaliser cette opération car nous avons ce qu'on appelle un **recouvrement de spectre** ou un **repliement de spectre** ou « **a spectrum aliasing** ».

Conclusion : Pour un bon échantillonnage d'un signal, en d'autres termes, pour qu'un échantillonnage ne déforme pas le spectre du signal de départ, il faut que la fréquence d'échantillonnage f_e soit supérieure à deux fois la plus haute fréquence B du signal de départ.

Soit : **$f_e > 2B$**

Cette condition est appelée : **le théorème de Shannon** ou bien la **fréquence de Nyquist** ou bien « **The Nyquist rate** »

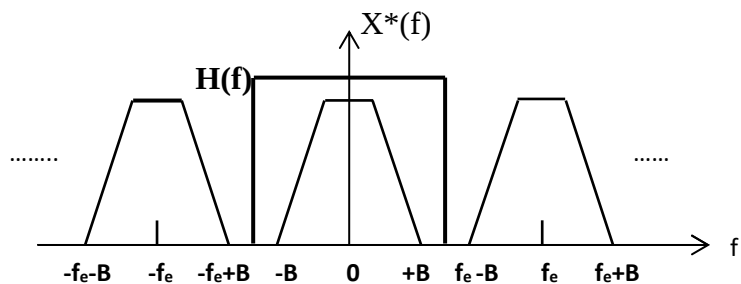
Cette inégalité constitue le *théorème de Shannon*, ce théorème fournit une limite théorique.

En pratique, on se rend compte que c'est insuffisant ; on adopte alors la condition

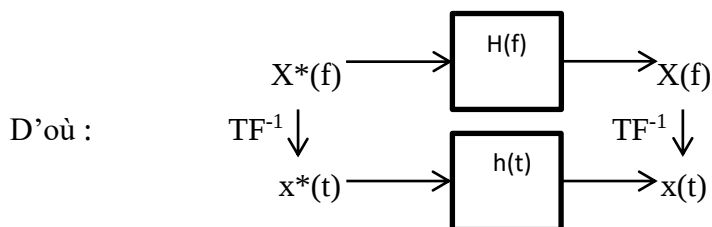
suivante : $5B < f_e < 25B$

5.5 : Reconstitution du signal de départ :

Nous avons vu que le signal de départ $x(t)$ ne pouvait être reconstituer à partir de $x^*(t)$ que dans le cas où $f_e > 2B$. En effet, en utilisant un filtre passe bas idéal, de fonction de transfert $H(f)$, on peut isoler le spectre $X(f)$ parmi toutes les composantes du spectre $X^*(f)$.



Dans le cas où la condition de Shannon est satisfaite, on peut reconstituer le signal continu initial $x(t)$ par la relation suivante : $X(f) = H(f) X^*(f)$ avec $H(f) = T_e \text{rect}(f / f_e)$



$h(t)$ étant la transformée inverse de $H(f)$, elle est aussi appelée réponse impulsionnelle du filtre.

$$x(t) = x^*(t) * h(t) \quad \text{avec } h(t) = \text{TF}^{-1} (H(f))$$

$$H(f) = T_e \text{rect}(f / f_e) \Rightarrow h(t) = f_e T_e \text{sinc}(f_e t) = \text{sinc}(f_e t)$$

$$\text{D'où : } x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kTe) \delta(t - kTe) * \text{sinc}(f_e t)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kTe) \text{sinc}[f_e(t - kTe)]$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kTe) \frac{\sin \pi f_e(t - kTe)}{\pi f_e(t - kTe)}$$